

Problem Set 7: 函数

(提交截止时间: 3 月 25 日 10:00)

Problem 1

判断下面定义的几个 $f(n)$ 是否是从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数:

a) $f(n) = n^3$

b) $f(n) = \sqrt{n^2 - n + 1}$

c) $f(n) = \frac{1}{n}$

Problem 2

判断下列各函数是否是从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的双射函数:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = e^x - 1$

Problem 3

令 f 为从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数 $f(x) = x^2 + 2x$. 求:

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x | x > 3\})$

Problem 4

设 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的解析式为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$. 试证明: f 为双射函数.

Problem 5

求下列函数的定义域和值域:

- a) 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数.
- b) 函数为扑克牌 (不含大小王) 的花色.
- c) 函数为位串指派串中块 11 出现的次数.
- d) 函数为正整数除以 2 的余数.

Problem 6

判断下列情况下 $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 是否是满射:

- a) $f(m, n) = 2m - n$
- b) $f(m, n) = m + n + 1$
- c) $f(m, n) = |m| - |n|$
- d) $f(m, n) = m^2 + |n|$
- e) $f(m, n) = m^2 - n^2$

Problem 7

设 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数, 其中集合 A 和集合 B 是有限集, 且 $|A| = |B|$. 证明 f 是单射当且仅当它是满射. 【提示: 考虑 $|A| \geq |f(A)|$ 】

Problem 8

设 $f: A \rightarrow B$ 且 $g: B \rightarrow C$, 若 $g \circ f$ (按右先制, 下同) 是单射, 试证明 f 是单射.

Problem 9

令 f 为从 A 到 B 的函数, S 为 B 的子集. 证明 $f^{-1}(\bar{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$. 注: \bar{S} 表示集合 S 的绝对补集, 即 $U - S$.

Problem 10

设 f 是从 Y 到 Z 的可逆函数, g 是从 X 到 Y 的可逆函数. 证明 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.